EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59
IV - 15 DECEMBER 1958

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

COMPUTER EN WISKUNDE-ONDERWIJS [1])

door

Dr. M. Euwe

Bestaat er samenhang tussen Wiskunde en de moderne bezigheid, die men programmeren noemt?

Stellig wel, maar niet in die zin, dat men om te kunnen programmeren zou moeten beschikken over een bepaalde dosis wiskundige kennis. Het verband ligt indirect. Voor het programmeren is uiterst belangrijk het vermogen om de problemen te splitsen in eenvoudiger onderdelen, hetgeen bij de oplossing van wiskundige vraagstukken eveneens bijzondere betekenis heeft. Er zijn ook andere aanknopingspunten, nauwkeurigheid, voortvarendheid, exact denken, exact formuleren, hoedanigheden, die zowel voor wiskunde als voor programmeren van vitaal belang zijn en die het best kunnen blijken aan de hand van een tweetal eenvoudige voorbeelden.

Gevraagd het aantal dagen, dat ligt tussen twee gegeven data van hetzelfde jaar J. Onderstellen we eenvoudigheidshalve, dat J geen schrikkeljaar is. De data zijn: D_1/M_1 en D_2/M_2.

Oplossing: In grote trekken loopt de oplossing zo, dat we eerst berekenen de hoeveelste dag van het jaar D_1/M_1 is, vervolgens welke dag D_2/M_2 om tenslotte de twee uitkomsten van elkaar af te trekken en met 1 te verminderen (dit laatste met het oog op de vraagstelling „Hoeveel dagen tussen").

De moeilijkheid is dat niet alle maanden evenveel dagen hebben. Telden alle maanden 30 dagen, dan gold de formule

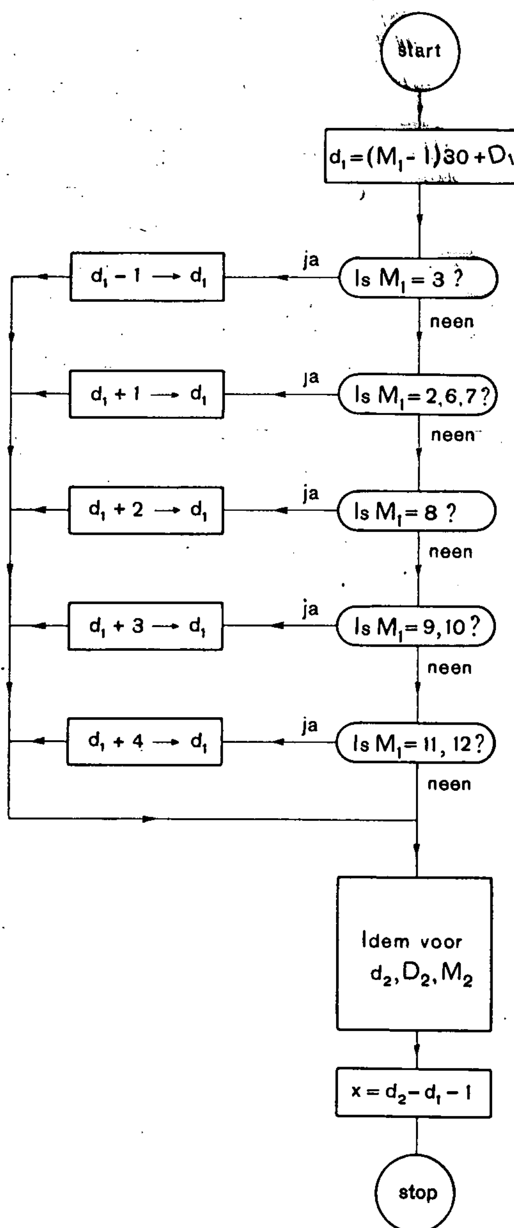
---

[1]) Op de conferenties over Automatisering die in oktober 1957 in Den Haag en in februari 1958 te Groningen, door het C.B.O. werden georganiseerd (zie Euclides XXXIII, 6, blz. 141—142) heeft Dr. Euwe een inleiding gehouden over dit onderwerp. Op verzoek van de redactie heeft hij zich bereid verklaard een artikel voor Euclides te schrijven waarin wiskunde-docenten wellicht aanleiding kunnen vinden tot het instellen van een onderzoek om na te gaan, of en in hoeverre leerlingen van het V.H.M.O. bekwaamheden in de geschetste denkrichting vertonen. De redactie van Euclides zal het op prijs stellen verslagen over opgedane ervaringen te ontvangen.

Ter nadere toelichting drukken we onder dit artikel de op de conferenties verstrekte syllabus, voorzover ze op de inleiding van Dr. Euwe betrekking heeft, nog eens af. (Red.)

$$d = 30(M - 1) + D.$$

Thans moeten enkele correcties worden aangebracht. Het is gemakkelijk na te gaan, dat de formule juist is voor $M = 1$, 4 en 5. Voor $M = 3$ is een correctie $- 1$ vereist, voor $M = 2$, 6 en 7 een correctie $+ 1$, voor $M = 8$ een correctie $+ 2$, voor $M = 9$ en 10 een correctie $+ 3$ en voor $M = 11$ en 12 tenslotte een correctie $+ 4$. We berekenen dus eerst een voorlopige d en brengen daarna de correctie aan. De flowchart ziet er als volgt uit.



Dit alles is zeer eenvoudig en kan best door leerlingen van 2de of 3de klas M.O. worden verwerkt. Anderzijds is dit een uitstekende oefening in systematisch en nauwkeurig denken. Bovendien gemakkelijk voor uitbreiding vatbaar. Neem b.v. voor J wèl een schrikkeljaar of neem twee verschillende jaren J_1 en J_2, beide in de 20ste eeuw enz.

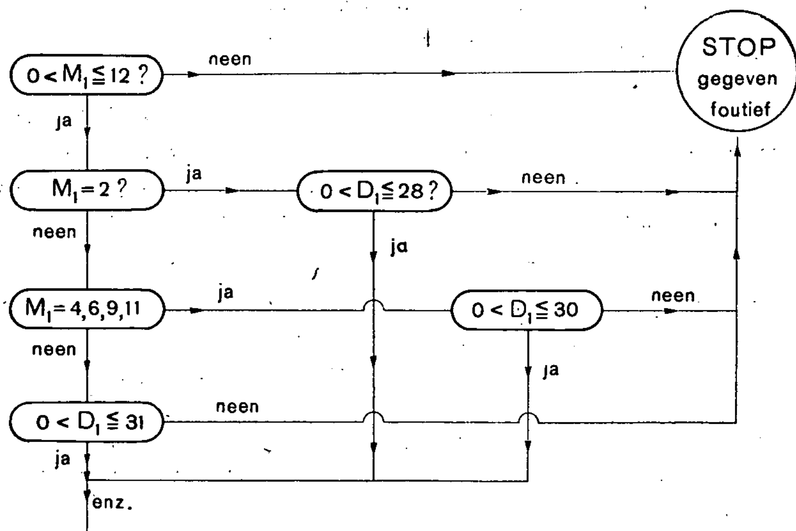
Ook van belang is het ,,keuren" van de gegevens, voordat de berekening begint. In ons voorbeeld moet aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

$$0 < M_1 \leqq 12$$

Als $M_1 = 2$ dan $0 < D_1 \leqq 28$
Als $M_1 = 4, 6, 9, 11$ dan $0 < D_1 \leqq 30$
Als $M_1 = 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12$ dan $0 < D_1 \leqq 31$
Alles idem voor M_2 en D_2

Voorts: $M_1 \leqq M_2$
Als $M_1 = M_2$ dan $D_1 < D_2$

Deze keuring betekent een flowchart op zichzelf, als volgt:



Als tweede een voorbeeld uit de Loonadministratie.

In de USA wordt ingehouden 18 % Loonbelasting (L.B.) van het Belastbaar loon (B.B.). Het belastbaar loon vindt men door het Brutoloon (B) te verminderen met $n \times 13$ dollar, waarbij n = aantal huisgenoten. Voorts wordt ingehouden Sociale Premie (S.P.) = $2\frac{1}{4}$ % van het Brutoloon tot een maximum van $ 94.50

per jaar. Teneinde het nettoloon N te kunnen bepalen moet men dus weten hoeveel S.P. van het begin van het jaar af in totaal werd ingehouden: T.

Gegeven: B, T, n.
Gevraagd: LB, SP, N.

Een getallenvoorbeeld.

B =		$ 106.40
aftrek (A)		
3 × $ 13	„	39.—
BB	$	67.40
LB = 18 % =		
12.132	„	12.13

Laat T = $ 92.40 zijn. We staan dus nog beneden het maximum. $2\frac{1}{4}$ % van 106.40 = 2.394 = $ 2.39. Daarmee zouden we evenwel boven het maximum komen.

SP = 94.50 — 92.40 = $ 2.10
N = 106.40 — 12.13 — 2.10 = $ 92.17

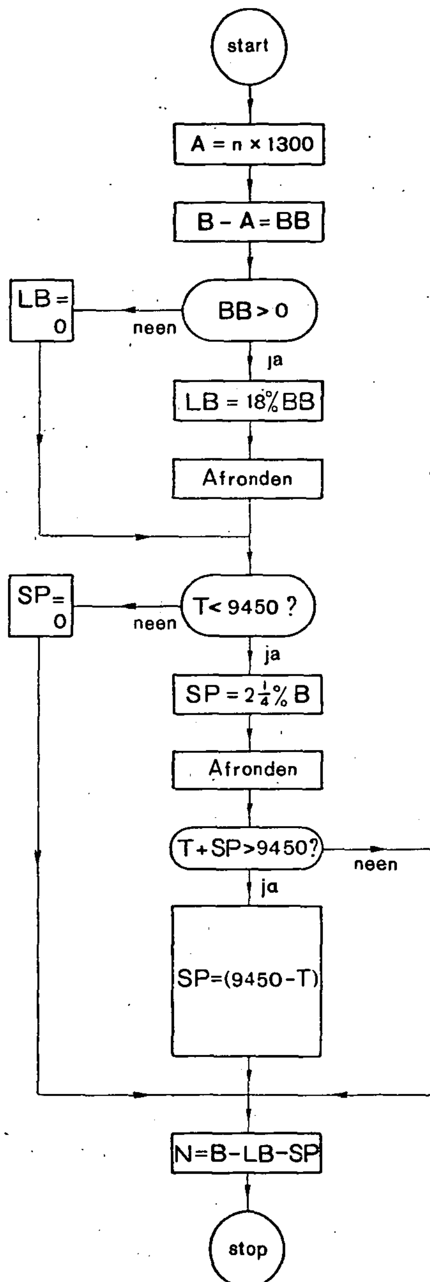
Thans de flowchart (zie hiervoor blz. 101).

Eén van de fijne puntjes in het onderzoek is, of het belastbaar bedrag BB (= B — A) positief is. Wanneer men daaraan niet zou denken, zou men komen tot een negatieve loonbelasting, die later wordt opgeteld, hetgeen stellig niet de bedoeling van de wetgever is geweest.

Ook in de berekening van de Sociale Premie zitten een paar voetangels. Er zijn blijkbaar 3 gevallen:

1) T ligt nog ver van de grens $ 94.50 verwijderd; men neemt dus $2\frac{1}{4}$ %
2) T is al op 94.50 gekomen, in welk geval SP = 0
3) T is geen 94.50, maar wordt door de laatste SP overschreden. In dat geval is SP = 94.50 — T

Alles bijeengenomen een eenvoudige berekening, die toch wel overleg vereist. Wanneer men de leerlingen met deze en dergelijke opgaven test, krijgt men stellig een breder inzicht in hun capaciteiten in het algemeen, in hun wiskundige aanleg in het bijzonder. Belangrijk is daarbij, dat niet te zeer de nadruk wordt gelegd op de tijdsfactor. Programmeren is een nauwkeurig werk, dat in alle rust dient te geschieden.


start
A = n × 1300
B - A = BB
BB > 0
neen
LB = 0
ja
LB = 18% BB
Afronden
T< 9450 ?
neen
SP = 0
ja
SP = 2¼% B
Afronden
T+SP>9450?
neen
ja
SP=(9450-T)
N=B-LB-SP
stop

COMPUTER EN WISKUNDE-ONDERWIJS
(syllabus conferenties oktober 1957 en februari 1958)

De Computer kan ontzaglijk veel presteren, maar de opdrachtgever moet de taal van de Computer volkomen meester zijn. Dit houdt in, dat we met een probleem niet klaar zijn, wanneer we het op de gebruikelijke klassieke wijze hebben opgelost. De oplossing dient nog in kleine stukjes te worden geknipt, het voedsel voor de Computer wordt gebroken en gemalen om verteerbaar te worden. Deze bezigheid wordt algemeen „programmeren" genoemd.

Het splitsen van een probleem of zijn oplossing in onderdelen is een in de wiskunde vaak voorkomend procédé. Vandaar, dat men gaarne verband legt tussen wiskunde-onderwijs en opleiding tot programmeur. Er zijn stellig veel aanknopingspunten. Behalve de reeds genoemde verknipping noemen wij nog: het werken met symbolen, het exact formuleren, het rekening houden met alle mogelijkheden.

Toch mag men het programmeren niet tot de wiskunde rekenen. Het programmeren is in de eerste plaats pragmatisch, d.w.z. op de praktijk gericht. De programmeur zoekt een oplossing, die hij op de Computer kan verwerken en behoeft doorgaans niet stil te staan bij de vraag, of hij de optimale oplossing heeft gevonden. Wèl zou het in bepaalde gevallen een kwestie van "to be or not to be" kunnen zijn, de optimale oplossing te vinden, maar ook dan zal de programmeur, in tegenstelling met de wiskundige, zich b.v. niet bezig houden met de vraag, of er misschien meer dan één optimale oplossing is. Programmeren is vaak het goochelen met getallen, het voortdurend proberen, dat aan puzzelen doet denken.

De karakteristieke kanten van het programmeren komen het duidelijkst naar voren, wanneer men praktische voorbeelden bekijkt. Om enkele te noemen:

Gevraagd van een aantal getallen het grootste te bepalen.

Hierbij spelen geduld, overgave en systematiek een belangrijke rol. Vooral, wanneer men deze opgave uitbreidt tot het naar grootte rangschikken van de gegeven getallen. Door op handige wijze met symbolen en indices om te springen, is de oplossing tot een soort cyclus te herleiden. Dit leidt niet alleen tot een bekorting van het schrijfwerk, maar bovendien tot een enorme besparing van instructies, hetgeen in de meeste gevallen doorslaggevende betekenis heeft.

Bij andere, eveneens eenvoudige problemen, zoals het berekenen van het aantal dagen bij gegeven begin- en einddatum, of de bepaling van loonbelasting en sociale premie volgens het in de U.S.A. geldende systeem, treedt het vermogen om verschillende mogelijkheden tegelijkertijd te volgen, sterk op de voorgrond.

Het is misschien niet overbodig het repetetieve karakter van de uit te werken Computer-opdracht nog eens te accentueren.

De berekening van het netto-salaris van een ambtenaar is voor een gegeven geval niet al te moeilijk. Het wordt pas lastig, wanneer men een programma heeft te ontwerpen, dat met alle mogelijkheden rekening houdt.

Tot slot enkele desiderata voor het M.O.Wiskunde, dat enigszins rekening zou houden met een latere opleiding tot programmeur.

1. Behandeling van het binaire stelsel; herleiding van binair tot decimaal en omgekeerd. Hoofdbewerkingen in het kort.
2. Veel werken met symbolen, letters en indices. Voortdurend ook de tekenmogelijkheden van de lettervorm in het oog houden, zoals dit reeds grondig geschiedt met de discriminant van de vierkantsvergelijking.
3. Bizondere aandacht voor ingeklede vergelijkingen en voor ingeklede vraagstukken in het algemeen.

   De overgang van de schrijftaal op symbolen is tegelijk moeilijk en belangrijk.

RECREATIE — DE GEVANGENE EN EEN KOE, DIE GRAS EET

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Het voornemen van de redactie een rubriek „mathematische recreatie" in Euclides op te nemen is totnogtoe niet tot uitvoering gebracht. Het onderstaande is bedoeld als eerste bijdrage voor deze rubriek. De redactie hoopt, dat vele andere bijdragen zullen volgen.

Het probleem, waar het om gaat, is wellicht verschillende lezers bekend. Mogelijk vinden zij in de toelichting van de oplossing nog nieuwe gezichtspunten. — Een gevangene is ter dood veroordeeld. Door zijn gedrag weet hij de sympathie van de directeur van de gevangenis te winnen. Deze wil voor hem de spanningen gedurende de tijd, die hij nog te leven heeft, zoveel mogelijk verminderen en belooft daarom hem te waarschuwen, wanneer de voltrekking van het vonnis zal plaats hebben. Zal de terechtstelling in een bepaalde week plaats vinden, dan zal de directeur hem dit de zaterdagavond voorafgaande aan die week meedelen. Om de spanning nog meer te verminderen zegt de directeur hem ook nog, dat vaststaat, dat de terechtstelling plaats zal hebben om twaalf uur 's middags en dat hij ervoor zorg zal dragen, dat het moment daarvan de gevangene bekend is één uur van te voren, doch niet eerder.

We kunnen de gemaakte afspraken samenvatten in het volgende viertal „hypothesen":

H1. hij wordt ter dood gebracht,

H2. dit gebeurt twaalf uur 's middags,

H3. hij zal het de voorafgaande zaterdagavond te horen krijgen,

H4. het tijdstip zal hij één uur van te voren weten en niet eerder.

De gevangene redeneert nu als volgt:

de executie geschiedt op zaterdag (onderstelling) → vrijdag om 11.01 uur heb ik nog geen bericht (H2, H4) → ik weet dan reeds, dat het zaterdag zal gebeuren (H2, H3, H4) → ik weet het tijdstip meer dan één uur van te voren, hetgeen in strijd is met H4, dus

C1. de executie geschiedt niet op zaterdag;

de executie geschiedt op vrijdag → donderdag om 11.01 uur heb ik nog geen bericht (H2, H4) → ik weet dan reeds, dat het vrijdag of zaterdag zal gebeuren (H2, H3, H4) → ik weet dan reeds, dat het

vrijdag zal gebeuren (C1) → ik weet het tijdstip meer dan één uur van te voren, hetgeen in strijd is met H4, dus

C2. de executie geschiedt niet op vrijdag;

en analoog trekt hij de conclusies C3—7, dat de executie niet zal plaats hebben op donderdag, woensdag, dinsdag, maandag en zondag.

Ten slotte concludeert hij hieruit: ik word niet ter dood gebracht (C1—7).

De gevangene is door deze redenering dermate gerustgesteld, dat hij niet het minst schrikt, als de directeur hem een bepaalde zaterdagavond ervan komt verwittigen, dat hij de komende week ter dood gebracht zal worden. En als de directeur dan de daaropvolgende woensdag om elf uur hem komt vertellen, dat over een uur de executie plaats zal vinden, wordt hij uiteraard boos en beschuldigt de directeur ervan, dat dit niet kan en in strijd moet zijn met de gemaakte afspraken. De directeur is zeer verbaasd en gaat tot verificatie over:

aan H1 en H2 is kennelijk voldaan,

wegens de waarschuwing de vorige zaterdag is aan H3 voldaan,

één uur van te voren heeft de gevangene bericht gekregen van zijn terechtstelling en uit zijn reacties blijkt toch wel overduidelijk, dat hij te voren niet van het tijdstip op de hoogte was, en dus is ook aan H4 voldaan.

Tot grote ontsteltenis van de gevangene gaat de executie dus door. De betrokkene heeft de gelegenheid niet gehad zich ervan te vergewissen, waar nu eigenlijk een fout gemaakt is, maar de lezer heeft hier gelukkig nog wel tijd voor.

De eerste reactie van ieder, die deze paradox onder ogen krijgt, is met argwaan de redenering bekijken en proberen te ontdekken, waar de fout zit. De conclusie in deze redenering, die steeds weer gewantrouwd wordt, is:

ik weet dan (donderdag om 11.01) reeds, dat het vrijdag of zaterdag zal gebeuren,

de executie geschiedt niet op zaterdag (C1) [1]),

dus: ik weet, dat de executie geschiedt op vrijdag.

Toch zal men moeten toegeven, dat dit een formeel correcte deductie is. Als A of B waar is en B is niet waar, dan is A waar, ongeacht de inhoud van A en B. En het is wel lijnrecht in strijd met de betekenis van deduceren, als men deze conclusie gaat wan-

---

[1]) Als men er bezwaar tegen heeft, dat er niet staat: „*ik weet*, dat de executie niet op zaterdag geschiedt", kan men opmerken, dat hij dit inderdaad weet, want hij heeft het zelf bewezen.

trouwen, doordat men de inhoud van A en B kent. Als men voor ogen houdt, dat men, om een redenering te weerleggen, verplicht is aan te wijzen, op welk ogenblik uit bepaalde premissen een conclusie getrokken is op *formeel* ontoelaatbare wijze, dan zal men spoedig inzien, dat er nergens een redeneerfout gemaakt is.

Dat anderszins de gevangenisdirecteur naar genoegen duidelijk gemaakt heeft, dat de fout ook niet bij hem schuilt en dat hij conform alle voorschriften gehandeld heeft, daaraan twijfelt wel niemand. Maar waar moeten we dan de fout zoeken?

Eigenlijk ligt de fout voor de hand. De gevangene is uitgegaan van de premissen H2—4 en heeft door een redenering aangetoond, dat daaruit volgde, dat hij niet zou worden ter dood gebracht. Dat wil zeggen, hij heeft aangetoond, dat uit H2—4 volgt, dat H1 onjuist is. Of nog anders gezegd: het stelsel hypothesen H1—4 blijkt een contradictoor stelsel te zijn. Nu kan men uit een contradictoor stelsel hypothesen (evenals uit een contradictoor axiomastelsel) elke conclusie trekken, en dus spreekt het vanzelf, dat men er ook de conclusie uit kan trekken, dat de executie niet zal plaats hebben. De redenering is dus weliswaar logisch correct, maar waardeloos.

Niet voor ieder is het evident, dat uit een onjuiste premisse elk oordeel gededuceerd kan worden. Een voorbeeld, waarin uit een onjuiste premisse zonderlinge resultaten volgen, is het volgende:

Gegeven. $3 = 5.$
Te bewijzen. $60 = 77.$
Bewijs. $3 = 5 \rightarrow 3 - 3 = 5 - 3 \rightarrow 0 = 2 \rightarrow \frac{0}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow$
$\rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 \,.\, 17 = 1 \,.\, 17 \rightarrow 0 = 17 \rightarrow 0 + 60 =$
$= 17 + 60 \rightarrow$ q.e.d.

Uit de redenering ziet men, dunkt mij, wel, dat de gekste conclusies mogelijk zijn. Meer algemeen kan men het probleem als volgt stellen:

Gegeven. A, niet–A.
Te bewijzen. B.
Bewijs. Gegeven is, dat A geldt.
Uit A volgt: A of B.
Dus: A of B geldt.
Uit A of B en niet–A volgt: B.
Zowel A of B als niet–A (gegeven) gelden.
Dus geldt B.

Uit het contradictore stel premissen A en niet–A kan dus elk oordeel B gededuceerd worden.

Na deze explicatie is het hopelijk niet verwonderlijk meer, dat uit het stelsel contradictore premissen H1—4 elk oordeel gededuceerd kan worden. De gevangene had dus evengoed b.v. kunnen bewijzen, dat hij de komende week zeven keer, namelijk elke dag om twaalf uur, geëxecuteerd zou worden. Uit de verkregen resultaten C1—6 (niet executeren op maandag t.m. zaterdag) volgt in verband met H1 (wel executeren), dat hij op zondag ter dood gebracht zal worden. En uit C1—5 en C7 volgt in verband met H1, dat hij op maandag wordt ter dood gebracht, enz. Hij had dus ook de gevangenisdirecteur op grond van deductieve redeneringen kunnen verwijten, dat deze zijn woord niet gestand gedaan had door niet op zondag om elf uur en daarna op maandag om elf uur, enz. hem zijn executie aan te kondigen, maar daartoe eerst op woensdag was verschenen. Hieruit blijkt wel duidelijk, dat de redenering, hoewel als zodanig juist, praktisch van onwaarde is.

We zijn nu niet meer verbaasd, dat de redenering ons niets leert, maar een gevoel van onbehagen blijft toch over. Dit gevoel vindt zijn oorsprong daarin, dat we niet inzien, hoe aan een stel contradictore hypothesen H1—4 toch, gezien de feiten, simultaan voldaan kan worden. De directeur komt op woensdag de cel binnen, deelt de gevangene mee, dat het vonnis voltrokken zal worden en aan de vier strijdige hypothesen H1—4 blijkt voldaan te zijn. Nu we menen de paradox opgelost te hebben, geraken we in een nieuw labyrint verzeild.

Om hier een oplossing voor te vinden, moeten we allereerst opmerken, dat in H1—4 het tijdstip niet in verband gebracht is met de werkelijke tijd. Door aan te nemen, dat H1—4 voor elk tijdstip gelden, zijn we tot een strijdigheid gekomen. We kunnen nu H1—4 vervangen door een stelsel hypothesen, dat er slechts weinig van afwijkt, maar toch genoeg om de strijdigheid te doen verdwijnen. Dit stelsel is:

K1. hij wordt ter dood gebracht,

K2. dit gebeurt twaalf uur 's middags,

K3. hij zal dit de voorafgaande zaterdag te horen krijgen,

K4. voor elk tijdstip t geldt, dat als de werkelijke tijd (d.i. de tijd die het op dat ogenblik is) t is en $t + 1$ uur op twaalf uur 's middags valt en hij om $t + 1$ uur geëxecuteerd zal worden, hij dit ten tijde t weet en dit niet op een tijdstip t' weet, waarvoor $t' < t$.

We hebben H1—3 onveranderd gelaten en H4 vervangen door K4. K4 heeft materieel dezelfde inhoud als H4; formeel is er echter een groot verschil. Doordat K4 een implicatie is, waarvan een van de premissen luidt, dat de werkelijke tijd t is, is het alleen mogelijk

deze hypothese toe te passen ten tijde *t*. Als het b.v. maandag is, dan kan men gaan piekeren over de situatie op zaterdag om elf uur 's morgens en trachten K4 toe te passen. Men gaat dan in K4 voor *t* substitueren „zaterdag elf uur 's morgens". Doet men dit, dan gaat de premisse „de werkelijke tijd is *t*" over in een foute bewering. En als de premisse van een implicatie in een foute bewering overgaat, kan men niet tot de juistheid van de conclusie besluiten. Het heeft dan dus even weinig zin K4 toe te passen als het zin heeft de stelling, dat een gelijkzijdige driehoek hoeken van 60° heeft, toe te passen op een driehoek, waarvan de zijden 3, 4 en 5 zijn. Formeel kan men dus met K4 niets beginnen, tenzij men voor *t* de tijd invult, die het op dat moment is. Daardoor is bovenstaande redenering, waaruit de strijdigheid van H1—4 bleek, niet reproduceerbaar voor K1—4. Het stelsel K1—4 blijkt beter aangepast aan de concrete situatie dan H1—4.

Een analoge, maar meer doorzichtige paradox is de volgende:

H1. ik heb na 1–4–1958 altijd één koe,

H2. ik heb op 1–4–1958 200 kg gras,

H3. ik krijg er per dag 2 kg gras bij,

H4. de koe eet per dag 5 kg van mijn gras.

Uit deze hypothesen volgt, dat ik op 1–1–1959 zal hebben 200 + 275 . 2 = 750 kg gras, inclusief het gras, dat door de koe is opgegeten. Zij kan dus op 1–1–1959 maximaal in totaal 750 kg van mijn gras hebben gegeten. Hiervan heeft zij 5 kg gegeten op 31–12, 5 kg op 30–12, enz., zodat zij 151 dagen voor 1–1–1959 beslist geen gras ter beschikking gehad heeft en op de daaraan voorafgaande dagen ook niet. Er volgt dus uit, dat zij b.v. op 1–6–1958 niet van mijn gras heeft kunnen eten. Toen op deze datum de proef op de som genomen werd, bleek het beest echter rustig te grazen en zich aan alle hypothesen gehouden te hebben, terwijl ook het grasveld zich eraan gehouden had per dag 2 kg gras te produceren. Hoewel niemand dit verhaal au sérieux neemt, is het toch in vrij sterke mate analoog aan het voorgaande.

De contradictie wordt ook hier erdoor veroorzaakt, dat men aanneemt, dat H4 voor elk tijdstip geldt en men daarbij geen acht slaat op de werkelijke situatie. Als men echter nadere beperkingen aanbrengt ten aanzien van de tijdstippen, waarvoor H4 geldt, en deze zo kiest, dat de werkelijke situatie erin weerspiegeld wordt, dan verdwijnt de contradictie. Men zou daartoe H4 b.v. kunnen vervangen door:

K4. als ik bij het begin van een dag minstens 3 kg gras heb, dan eet de koe die dag 5 kg van mijn gras.

HET KONIJNENVRAAGSTUK VAN FIBONACCI

door

Dr. C. J. VOOYS

Leonardo van Pisa was de zoon van Bonacius; uit het latijnse Filius Bonacii is de naam Fibonacci ontstaan, waarmee deze schrijver in de geschiedenis van de wiskunde bekend is.

1 paar
1e maand
2
2e maand
3
3e maand
5
4e maand
8
5e maand
13
6e maand
21
7e maand
34
8e maand
55
9e maand
89
10e maand
144
11e maand
233
12e maand
377

In 1202 verscheen van hem een werk [1]), waarin voor het eerst in West-Europa de z. n. indische cijfers gebruikt werden, die wij nog steeds benutten; dit bracht grote vereenvoudiging in het rekenen, dat met behulp van de romeinse cijfers zeer omslachtige bewerkingen vereiste.

In die abacus (rekenbord) van Leonardo Pisano treft men ook het volgende konijnenvraagstuk aan, waarin de getallen voorkomen, die bekend zijn gebleven als de getallen van Fibonacci en waarvan de definitie is:

$$t_1 = 0; \ t_2 = 1; \ t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$$

Dit schijnt het oudste voorbeeld te zijn van een teruglopende (recurrerende) reeks. [2])

„Hoeveel paar konijnen in één jaar uit één paar voortkomen. [3])

Iemand zette eens één paar konijnen in een verblijf, dat geheel was afgesloten, om te zien, hoeveel paar daaruit in één jaar zouden voortkomen; het is n.l. hun natuur iedere maand een nieuw paar voort te brengen en in de tweede maand na hun geboorte brengen die weer voort. Omdat genoemd paar in de eerste maand voortteelt, zult ge een dubbel paar hebben en in één maand zullen er dan twee paren zijn. Daarvan brengt één paar en wel het eerste, in de tweede maand voort; zo zijn er in de tweede

[1]) Liber Abaci compositus a leonardo filio Bonacij Pisano in anno M°CC°II° uitg. Boncompagni 1857, blz. 283.

[2]) Cantor Vorlesungen über die Gesch. der Mathem., 1913 I 283/84; II 26.

[3]) Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

maand 3 paren; hiervan worden er in één maand twee paar drachtig; en in de derde maand worden twee paar konijnen voortgebracht; dus zijn er in die maand 5 paar . . . ."
Zo blijft de schrijver doorgaan; aan het slot geeft hij de volgende saamvatting, verduidelijkt door een tekening.

. . . . „In de randfiguur hiernaast kan men n.l. zien op welke manier wij dit hebben berekend: we hebben het eerste getal bij het tweede geteld en wel 1 bij 2; het tweede bij het derde; het derde bij het vierde; het vierde bij het vijfde enz. totdat we het tiende bij het elfde geteld hebben n.l. 144 bij 233; hiermee hadden wij het totaal van de bedoelde konijnen n.l. 377; zo zou men te werk kunnen gaan ten aanzien van een onbegrensd aantal maanden."

parium	1
Primus	2
Secundus	3
Tercius	5
Quartus	8
Quintus	13
Sextus	21
Septimus	34
Octavus	55
Nonus	89
Decimus	144
Undecimus	233
Duodecimus	377

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare et in secundo mense ab eorum nativitate germinant; quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum in secundo mense germinat [1]; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur et germinantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense . . . .
. . . . Potes enim videre in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, videlicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, videlicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, videlicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

1) De tekst heeft — minder juist — geminat.

LINEAIRE ALGEBRA EN LINEAIRE VECTORRUIMTEN [1])

door

Prof. Dr A. C. ZAANEN

Het houden van een voordracht over dit onderwerp heeft een moeilijk aspect; enerzijds immers zal ik voor een deel van het gehoor niets vertellen wat nieuw is, omdat de fundamentele grondbeginselen van de lineaire algebra tegenwoordig tot het standaardrepertoire van de eerstejaarscolleges behoren (zowel aan de universiteit als aan de technische hogeschool), anderzijds is het lastig om aan de niet-kenners in de korte beschikbare tijd voldoende goed duidelijk te maken, waar het in wezen om gaat. Nu is het wel zo, dat men ook in de oudere leerboeken over algebra enige hoofdstukken kan vinden, die de lineaire algebra behandelen. Dat zijn dan de hoofdstukken, die de opschriften dragen: Determinanten en matrices, lineaire vergelijkingen, lineaire en kwadratische vormen. Deze volgorde (de determinanten voorop) is daar essentieel, want speciaal bij de behandeling van de theorie van stelsels lineaire vergelijkingen speelden de determinanten een hoofdrol. Dit nu is tegenwoordig anders. Bij de modernere behandeling van de lineaire algebra stelt men zich (getuige het voorwoord in de vele leerboeken, die de laatste jaren verschenen zijn) twee doeleinden:

1. Inleiding tot de abstracte denkwijze van de moderne algebra aan de hand van een betrekkelijk eenvoudig onderwerp, dat toch tot een aantal beslist niet-triviale resultaten leidt.

2. Toepassing op de analytische meetkunde. Een betrekkelijk groot aantal stellingen uit de analytische meetkunde, die in de oudere meetkundeboeken min of meer te hooi en te gras bewezen werden, zijn namelijk directe toepassingen van de hoofdresultaten uit de lineaire algebra (stellingen over snijding en loodrechte stand van lijnen en vlakken, stellingen over klassificatie van kegelsneden en kwadratische oppervlakken).

In plaats van nu de determinanten naar de voorgrond te schuiven, zoals vroeger gebeurde, laat men tegenwoordig de lineaire vector-

[1]) Voordracht gehouden tijdens de vakantiecursus 1958 van het Mathematisch Centrum op 25 augustus 1958.

ruimten optreden. Het is dus zinvol om het zuiver wiskundige gedeelte van deze voordracht te beginnen met de uiteenzetting van wat een lineaire vectorruimte is.

In de theorie der lineaire vergelijkingen treden de „onbekenden" $x_1, \ldots, x_n$ op, en in de theorie der lineaire en kwadratische vormen treden de „variabelen" $x_1, \ldots, x_n$ op. In beide gevallen hebben we dus te maken met n-tallen (reële of complexe) getallen $(x_1, \ldots, x_n)$. De collectie van al deze n-tallen (bij vaste n) heet nu een vectorruimte, en zo'n n-tal $(x_1, \ldots, x_n)$ heet een vector uit die vectorruimte; notatie $x = (x_1, \ldots, x_n)$. We definiëren nu wat we onder optelling van twee vectoren verstaan, en ook wat we onder vermenigvuldiging van een vector met een (reëel of complex) getal α verstaan.

DEF. *Als* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *en* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *terwijl* α *een getal is, dan is*

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Het is dan vrijwel direct in te zien, dat de volgende eigenschappen gelden:

(1) $x + y = y + x$,
(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(3) $x + 0 = x$ voor elke x, waarbij $0 = (0, \ldots, 0)$,
(4) Als x en z gegeven zijn, dan is er precies één y, zodat $x + y = z$,
(5) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
(6) $0.x = 0$ voor elke x,
(7) $1.x = x$ voor elke x,
(8) $\alpha.0 = 0$ voor elke α,
(9) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
(10) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

In het geval dat $n = 3$ en alle α reëel zijn, kunnen al deze eigenschappen geïllustreerd worden door de bekende figuurtjes, waarbij een vector x een pijl is, die in een assenstelsel van de oorsprong naar (x_1, x_2, x_3) loopt. Hetzelfde als $n = 2$ of $n = 1$. De eigenschappen (1)—(4) drukken uit dat de vectorruimte een Abelse groep is; de eigenschappen (5)—(8) geven de eigenschappen van de vermenigvuldiging met „scalaire getallen" aan, terwijl (9) en (10) distributieve eigenschappen zijn.

Het is nu voor het goede begrip van zeker belang, op dit punt al direct weer af te zien van een vector x als een n-tal getallen $(x_1, \ldots, x_n)$, en in plaats daarvan een vectorruimte te zien als een

abstracte verzameling van elementen x, waarin een optelling en een vermenigvuldiging met scalaire getallen gedefiniëerd zijn, zó dat aan (1)—(10) voldaan is. Als dit gebeurd is, voeren we nu eerst de begrippen „lineair afhankelijk" en „lineair onafhankelijk" in: De vectoren $x_1, \ldots, x_n$ heten *lineair afhankelijk* als er getallen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bestaan (niet allemaal nul) zódat

(1) $$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$

en zij heten *lineair onafhankelijk* als zij niet lineair afhankelijk zijn (m.a.w. als uit de betrekking (1) volgt dat $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$). Verder heet x een *lineaire combinatie* van $x_1, \ldots, x_n$ als er getallen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ bestaan, zó dat $x = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$.

Indien de vectoren $e_1, \ldots, e_n$ zó zijn dat elke vector x uit de ruimte een lineaire combinatie van $e_1, \ldots, e_n$ is, dan heet $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een *basis* van de vectorruimte. Zijn $e_1, \ldots, e_n$ bovendien lineair onafhankelijk, dan spreekt men van een *lineair onafhankelijke basis*. Er bestaan vectorruimten, waarin zo'n eindige basis niet aanwezig is, maar wij zullen ons vandaag beperken tot het geval dat er wel zo'n lineair onafhankelijke basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ is. Elke x is dan van de vorm

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

en dank zij de lineaire onafhankelijkheid van de basis zijn de *kentallen* $x_1, \ldots, x_n$ van x t.o.v. deze basis eenduidig bepaald.

Het is natuurlijk best mogelijk dat in dezelfde ruimte nog een andere lineair onafhankelijke basis aanwezig is, en het staat à priori in 't geheel niet vast dat het aantal vectoren daarin weer n is. Daarom is de volgende stelling van belang (in principe afkomstig van Steinitz):

STELLING. *Als $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\{e'_1, \ldots, e'_k\}$ lineair onafhankelijke bases in dezelfde vectorruimte zijn, dan is $k = n$. Verder vormt elk n-tal lineair onafhankelijke vectoren een basis, en voor $m > n$ is elk m-tal vectoren lineair afhankelijk.*

Op grond van deze stelling kunnen we nu het getal n, dat in deze stelling optreedt, de *dimensie* van de beschouwde vectorruimte noemen. Als men in zo'n n-dimensionale vectorruimte nu een willekeurige lineair onafhankelijke basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ kiest, dan staan daardoor de kentallen $x_1, \ldots, x_n$ van een willekeurige vector x t.o.v. die basis vast. Als vector y de kentallen $y_1, \ldots, y_n$ t.o.v diezelfde basis heeft, dan zien we direct dat $x + y$ de kentallen $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n$ heeft, terwijl αx de kentallen $\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n$ heeft. In wezen is elke n-dimensionale vectorruimte dus toch weer te identificeren met de ruimte R_n der n-tallen $(x_1, \ldots, x_n)$.

Om nu te laten zien hoe deze vectorruimten een rol spelen in de

theorie van de lineaire vergelijkingen, beschouwen we een matrix van (reële of complexe) getallen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Elke rij laat zich opvatten als een vector in de n-dimensionale ruimte R_n; elke kolom als een vector in de k-dimensionale ruimte R_k.

STELLING. *Het maximale aantal lineair onafhankelijke rijvectoren is gelijk aan het maximale aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren.*

Dit gemeenschappelijke maximale aantal heet de *rang* van de matrix. Deze definitie van de rang wijkt dus af van de oudere definitie met behulp van de onderdeterminanten, die ongelijk aan nul zijn; een „latere" stelling over determinanten zal tonen dat beide definities gelijkwaardig zijn.

Beschouw nu het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & & a_n & b \end{matrix}$$

of, in vectornotatie in R_k, $x_1a_1 + \dots + x_na_n = b$. Men vraagt dus eigenlijk, bij gegeven $a_1, \dots, a_n$ en b, of b een lineaire combinatie van $a_1, \dots, a_n$ is, en zo ja, dan wil men de coëfficiënten in die combinatie bepalen. Voor het geval $b = 0$ (homogeen stelsel vergelijkingen) komt de vraag naar de existentie van een oplossing ongelijk aan de nuloplossing neer op de vraag of de gegeven vectoren $a_1, \dots, a_n$ lineair afhankelijk zijn. Als $n > k$, dan hebben we meer vectoren dan de dimensie van de ruimte bedraagt, dus dan is er zeker lineaire afhankelijkheid.

De hoofdstelling luidt:

STELLING. *Het stelsel* (I) *heeft dan en slechts dan minstens één oplossing als de coëfficiëntenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

en de „aangevulde matrix”

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$$

dezelfde rang hebben.

Deze stelling is equivalent met de „oude” stelling, die als voorwaarde voor oplosbaarheid noemt het nul zijn van alle karakteristieke determinanten, die door randing van een hoofddeterminant ontstaan.

Ook voor het „aantal” oplossingen bestaat een stelling, die een doorzichtigere formulering heeft dan de „oude” stelling op dit gebied. Men kan nu nog vragen hoe het gaat met het effectief bepalen van de oplossingen, omdat men uit de klassieke boeken misschien de indruk op zou doen dat dit niet gaat zonder de regel van Cramer te gebruiken, dus niet zonder determinanten. In de praktijk is het zó dat reeds bij vier onbekenden de methode van „op een systematische manier optellen en aftrekken” sneller werkt dan de determinantenmethode. Overigens neemt bij beide methoden de benodigde tijd met het aantal vergelijkingen en onbekenden zó snel toe, dat men al spoedig tot andere hulpmiddelen (rekenmachines) zijn toevlucht moet nemen.

Tenslotte zullen we enkele woorden wijden aan de lineaire transformaties in R_n, die een belangrijke rol spelen bij een systematische behandeling van de theorie der kwadratische vormen in „n variabelen”. We denken ons de n bij n matrix met algemene term t_{ij} gegeven; door middel van de formules

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} y_1 = t_{11}x_1 + \dots + t_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n = t_{n1}x_1 + \dots + t_{nn}x_n \end{cases}$$

is dan aan elke vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ uit R_n een vector $y = (y_1, \dots, y_n)$, eveneens uit R_n, toegevoegd. Vectornotatie $y = Tx$. We zeggen dat door (II) de lineaire transformatie T gegeven is. De transformatie heet lineair omdat $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$ (In woorden: het beeld van een lineaire combinatie is diezelfde lineaire combinatie van de aparte beelden).

STELLING. 1°. *De transformatie T is „omkeerbaar” dan en alleen dan als de rang van de transformatiematrix n is.*

2°. *Als men twee lineaire transformaties achter elkaar toepast dan is*

de matrix van de „produkttransformatie" gelijk aan het matrixprodukt van de aparte transformatiematrices.

Van belang voor het inzicht in het gedrag van zo'n transformatie T is de kennis van de *eigenwaarden* en de bijbehorende *eigenvectoren* van T. Het getal λ heet een eigenwaarde van de transformatie T als er een vector $x \neq 0$ bestaat zó dat $Tx = \lambda x$, en x heet dan een bij die λ behorende eigenvector. Het is gemakkelijk in te zien dat de eigenwaarden van T de wortels zijn van de n-de graadsvergelijking

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ t_{n1} & t_{n2} \dots & t_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(eigenwaardevergelijking, seculaire vergelijking). Bij elk der gevonden wortels λ vindt men de bijbehorende eigenvectoren x door (voor die λ) het homogene stelsel vergelijkingen $Tx = \lambda x$ op te lossen. Een diepergaande analyse van de verzameling dezer eigenvectoren leidt naar de theorie der elementaire delers van een lineaire transformatie.

Beschouw nu een kwadratische vorm $\Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ in „n variabelen". Voor de eenvoud zullen we aannemen dat de gegeven getallen a_{ij} en ook alle x_i reëel zijn. Dan is het geen beperking der algemeenheid om ook aan te nemen dat $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle i en j, zodat de n bij n matrix der a_{ij} nu een *symmetrische matrix* is. De bijbehorende lineaire transformatie A heet dan ook *symmetrische transformatie.* Eén der hoofdproblemen bij zo'n symmetrische kwadratische vorm is nu om deze door toepassing van een omkeerbare lineaire transformatie T van het type (II) over te doen gaan in een som van kwadraten $\Sigma_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2$ (de gemengde termen ontbreken dus, m.a.w. $b_{ij} = 0$ voor $i \neq j$). Dit kan op vele manieren gebeuren, maar men kan nog de extra eis stellen dat diezelfde omkeerbare transformatie T de kwadratische vorm $x_1^2 + \dots + x_n^2$ overvoert in $y_1^2 + \dots + y_n^2$. Er blijkt inderdaad minstens één transformatie T te zijn, die aan deze eisen voldoet, en de oorspronkelijke kwadratische vorm gaat dan over in $\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$, waarbij $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ juist de eigenwaarden van de symmetrische transformatie A zijn. Deze eigenwaarden blijken overigens allemaal reëel te zijn, zodat alles zich „in het reële" blijft afspelen. Toepassing van dit resultaat in de analytische meetkunde voert onmiddellijk tot de herleiding van de vergelijking van een middelpuntskegelsnede of middelpuntskwadriek tot de „hoofdassengedaante".

Als slotopmerking wil ik erop wijzen dat vrijwel alles wat hier voor eindigdimensionale vectorruimten verteld is, zich uit laat breiden (analoga bezit) tot het oneindigdimensionale geval. Men krijgt dan bijv. stellingen in de theorie der integraalvergelijkingen en in de spectraaltheorie in ruimten van Hilbert.

Een prettig leesbaar boek over deze materie is bijv. het boek van P. R. Halmos, Finite-dimensional vector spaces, 2de druk, Princeton Univ. Press en Van Nostrand, 1958, 200 pagina's.

EINDEXAMEN-LUXEMBURG 1958 [1])

Examen de fin d'études secondaires
1958

Enseignement classique

I. a. Algèbre et Géométrie
Sections gréco-latine, latine A et C

1. Dériver: $y = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$; (4 points) $y = \dfrac{a \sin 2x}{1 - \cos 2x}$. (3 points)

2. Intégrer: $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx$; (4 points) $\int \dfrac{(4x-3)^2}{\sqrt{x}}\, dx$. (3 points)

3. Etude et graphique de la fonction:
$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}.$$ (12 points)

4. Etudier les variations de la surface latérale d'un cône droit circonscrit à une sphère donnée. (12 points)

5. Calculer la surface comprise entre la courbe $y = 2x^2 + 9x - 18$ et l'axe des x. (8 points)

---

[1]) Door vriendelijke bemiddeling van Dr. A. Gloden ontvangen. Zie ook Euclides XXXII, blz. 28 en XXXIII, blz. 152.

6. Dans le cercle $x^2 + y^2 - 25 = 0$, on mène la corde définie par $x = 4$. Calculer les volumes engendrés par la rotation des 2 segments circulaires et vérifier les résultats géométriquement. (8 points)

b. Trigonométrie

1. Simplifier l'expression:

$$\frac{\sin 2a + 2 \sin 3a + \sin 4a}{\sin 3a + 2 \sin 4a + \sin 5a}.$$ (12 points)

2. Rendre calculable par logarithmes

$$1 - \sin a - \cos 2a.$$ (12 points)

3. Résoudre l'équation:

$$2 \sin x - 3 \cos x = 1.$$ (12 points)

4. Un monument de 3 m de hauteur repose sur un socle. Trouver la hauteur du socle, sachant qu'un observateur, placé à 10 m de son pied, doit voir le socle et le monument ensemble sous un angle de 35 degrés. On suppose que l'oeil de l'observateur se trouve à une hauteur de 1,50 m. (18 points)

II. Sous-section latine C (section des sciences naturelles) Compléments de Mathématiques

a. Calcul différentiel et intégral

Dériver:

$$y = \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}},$$

$$y = 2e^{\sqrt{x}} (x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6),$$

$$y = \log (\sqrt{1 + x^4} + x^2).$$

Intégrer:

$$\int \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 6x + 5} dx,$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx,$$

$$\int x^2 \cos x \, dx.$$ (9 points par question)

b. Géométrie analytique

1. Construire l'ellipse:

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0.$$

Trouver aussi les points le plus haut et le plus bas.

2. Mener au cercle: $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0$ les tangentes parallèles à la droite: $y = 4x/3$.

3. Par le point $\binom{4}{4}$ mener la tangente à la parabole: $y^2 = 4x$. Trouver le point d'intersection de cette tangente et de la directrice. Par ce point mener une seconde tangente à la parabole et montrer que les deux tangentes sont perpendiculaires.

(18 points par question)

III. Sous-section latine B (Mathématiques spéciales).

a. Algèbre et calcul différentiel et intégral.

1. Différentier par rapport à x:

$$y = \sqrt{ax - x^2} - a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a - x}{x}}.$$ (6 points)

2. Trouver $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction suivante:

$$1 + xy = ln(e^{xy} + e^{-xy}).$$ (6 points)

3. Etudier la fonction:

$$y = ln \sin x.$$ (7 points)

Max. ou Min. Courbe.

4. Etudier la fonction:

$$y = e^{-x^2}.$$

Max. ou Min. Points d'inflexion. Courbe. (7 points)

5. Etudier la série:

$$\frac{\sqrt{2}}{1.2} + \frac{\sqrt{3}}{2.3} + \frac{\sqrt{4}}{3.4} + \ldots$$

Terme général. Convergence ou divergence. (7 points)

6. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$. (7 points)

7. $\int \frac{4x + 2}{5 - x^2} dx$. (7 points)

8. Volume du segment sphérique à deux bases à l'aide d'une intégrale. (7 points)

b. Géométrie analytique

1. Par les points: $A\binom{0}{3}$; $B\binom{0}{-3}$ mener un cercle tangent au cercle:

$$x^2 + y^2 - 16x + 9y + 21 = 0. \qquad (12 \text{ points})$$

2. Pour quel point de la parabole: $y^2 = 2px$, la longueur de la tangente est-elle égale à quatre fois l'abscisse du point de contact? Preuve à l'aide de:

$$y^2 = 4x. \qquad (12 \text{ points})$$

3. Réduire:

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x + 6y + 5 = 0.$$

Figure. (18 points)

4. Conique par: $\binom{0}{2}$; $\binom{-2}{0}$; $\binom{2}{-8}$ et symétrique par rapport à l'origine. (12 points)

c. Compléments de géométrie plane

1. Etudier l'homothétie d'une même figure F par rapport à 2 centres différents O_1 et O_2 et de même rapport k; appliquer le résultat trouvé pour déterminer l'homothétique d'un cercle C par rapport à un point quelconque 0. (14 points)

2. Etudier le produit d'une homothétie et d'une translation et montrer que ce produit n'est pas commutatif. (14 points)

3. Construire un cercle passant par 2 points donnés A et B et tangent à un cercle donné O; discussion. (13 points)

4. On donne un cercle et une droite extérieure à ce cercle; montrer que l'une des figures peut être considérée comme l'inverse de l'autre dans 2 inversions différentes que l'on précisera. (13 points)

NOGMAALS DE Y-AS

door

Dr. H. STREEFKERK

Het kan, dunkt mij, geen kwaad om de discussie rondom de invoering van de Y-as, begonnen door dr. van Tol en dr. Vredenduin in Eucl. 33, X, voort te zetten. Ik voel daar te meer voor, omdat in de Algebra-methode, waaraan ik heb meegewerkt, een door dr. Koksma voorgestelde methode is toegepast, die afwijkt zowel van wat dr. van Tol, als van wat dr. Vredenduin verdedigt, en ook van wat zij bestrijden. Daar beide heren, als auteurs of mede-auteurs van een eigen methode, vanzelfsprekend geen ervaring opgedaan hebben met onze methode, en ik deze ervaring wèl opgedaan heb, acht ik het wel van belang om mijn ervaringen naast de hunne te stellen.

Voorop sta dan de mededeling, dat door ons een nieuwe serie Algebraboekjes ontworpen is, die het WIMECOS-programma tot grondslag hebben [1]) en *dat wij daarin van onze bovenbedoelde methode afgeweken zijn*, zij het met behoud van de grondgedachten. Onze methode was tot nog toe als volgt:

1. *Invoering van een X- en een Y-as*; coördinaten; het voorstellen van de oplossingen van een onbepaalde vergelijking (bijv.: $3x + 5y = 16$; $x^2 - 2x = y + 3$) door punten; krommen als m.p. van „oplossingspunten". Men noemt dit — afkeurend — analytische meetkunde. Het zij zo; maar het staat hier in dienst van de algebra en is zeer instructief.
2. *Speciale behandeling van $ax + by = c$ en $y = ax^2 + bx + c$ als krommen* die de oplossing van onbepaalde vergelijkingen uitbeelden. Analytische meetkunde? Het zij zo, maar dan in dienst van de algebra, en niet van de meetkunde.
3. *Behandeling van het functiebegrip*; eerst algebraïsch; $f(3)$ betekent: vervang in $f(x)$ de x door 3 (en reken de waarde hiervan uit, zou dr. van Tol toevoegen; ik laat dit buiten de discussie). Dan komt de *grafiek* aan de orde. Men lette wel: in 2 is nergens van grafieken sprake geweest. De grafiek wordt getekend zonder Y-as, en opgezet met behulp van loodlijnstukken op de X-as,

[1]) Deze serie wordt pas gepubliceerd na officiële invoering van het nieuwe programma.

dus functiewaarde = lengte loodlijnstuk (zie art. Vredenduin, blz. 317, fig. 2).

4. *Ontdekking*; de uiteinden van de loodlijnstukken van de grafiek van $ax + b$, zijn de oplossingspunten van de vergelijking $y = ax + b$. Natuurlijk komt hierbij aan de orde, dat door de vergelijking $y = ax + b$ de onbekende y als functie van de onbekende x bepaald wordt.

Deze methode voldoet mij uitstekend, *maar kost te veel tijd*.

In onze nieuwe leergang is de andere, eveneens door dr. Koksma als mogelijk aangewezen, methode gevolgd. Deze is meer in overeenstemming met het programma van WIMECOS, dat immers niets zozeer vreest als besmetting met alles wat naar analytische meetkunde zweemt. Toch willen wij de analytische meetkunde niet geheel vermijden, integendeel!

Mèt dr. Vredenduin ben ik van mening, dat we met het functiebegrip moeten beginnen en daarbij geen afhankelijke variabele moeten invoeren in de vorm van een y of een Y-as; de grafiek bestaat uit een ordinatenverzameling.

Mèt dr. van Tol ben ik van mening, dat we de invoering van een Y-as op den duur niet kunnen missen, en voor besmetting met een beetje analytische meetkunde niet bang moeten zijn, ook al is dit een afzonderlijk vak.

Met beide heren verschil ik van mening hierin, dat ik de Y-as niet als gemakaanbrengende peilschaal voor de loodlijnstukken wens te zien, maar als echte coördinatenas; en dat ik de letter y niet als een verkapte $f(x)$ wens te zien, maar als een 2e coördinaat, of als een 2e onbekende.

Hieruit resulteert de volgende leergang:

1. *Invoering van het functiebegrip*. Dit geschiedt op de door dr. van Tol op blz. 308 aangegeven manier, maar met $f(x)$ i.p.v. y.
2. *Grafiek van een functie* als verzameling loodlijnstukken, die de waarden van $f(x)$ aangeven (ordinatenverzameling).
3. *Behandeling van de lineaire en de kwadratische functies* in de vorm $ax + b$ en $ax^2 + bx + c$ (beide vaak, maar niet altijd, door $f(x)$ aangeduid; ik teken hierbij aan, dat ik in het voorbeeld van dr. van Tol, blz. 310 onderaan, niet zou vragen: „teken de grafiek van x", maar: „teken de grafiek van *de functie* x").
4. *Invoering van coördinaten*; niet naar aanleiding van 1, 2 en 3, maar als geheel nieuw onderwerp; X- en Y-as; voorstellen van de oplossingen van een onbepaalde vergelijking door de punten van een rechte of kromme.
5. *Ontdekking*: de kromme, die de uiteinden van de loodlijnstukken

van de grafiek van $f(x)$ bevat, is ook de kromme van de oplossingspunten van de onbepaalde vergelijking $y = f(x)$; resulterend in de stelling: *de grafiek van de functie* $f(x)$ *is de kromme* $y = f(x)$.

Hier treedt dus in de uitdrukking $y = f(x)$ de y niet als een andere naam op voor $f(x)$, maar in andere betekenis!

In wezen is dit dezelfde methode als de eerstgenoemde, alleen de volgorde is gewijzigd, omdat daardoor het functiebegrip in de tijd *eerder*, en in zijn betekenis *primair* aan de orde komt.

Het oplossen van een stelsel van 2 vergelijkingen, waarvan de ene lineair en de andere kwadratisch is, wordt dan onverbloemd „analytisch" geïllustreerd. Ik vermag niet in te zien, waarom men in het stelsel

$$\begin{Bmatrix} ax + by = c \\ ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0 \end{Bmatrix}$$

eerst tweemaal y als functie van x moet schrijven (niet eens altijd mogelijk), vervolgens de aldus gevonden functies als ordinaatverzamelingen in beeld moet brengen, om dan de gemeenschappelijke loodlijn op te sporen (bij het algebraïsch oplossen volgt men gewoonlijk óók niet de methode van gelijkstelling, maar die van substitutie). Waarom mag men niet een tweetal krommen als m.p. der oplossingspunten tekenen en naar de snijpunten kijken? De krampachtigheid om elk spoor van „krommen" te weren wordt bijna kinderachtig, als men sommige van de 250 opgaven leest, die de WIMECOS-commissie heeft opgesteld (Eucl. 32, IV). Voorop sta, dat ik deze verzameling opgaven hogelijk waardeer [1]; het gaat nu alleen maar over de formulering, die een consequentie is van het systeem. Twee voorbeelden:

I. blz. 115, nr 6:

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

a. Teken de snijpunten van de grafiek van $f(x)$ *met de X-as en de raaklijnen in deze snijpunten;*

b. Teken de punten van de grafiek, waarvoor $x = 1$ *en* $x = -1$, *en de raaklijnen in deze punten.*

Dit is allemaal nogal meetkundig. De functie dient alleen om een kromme lijn te verwekken, die aardige raaklijnen heeft. Is het dan niet beter om ronduit en eerlijk te spreken van „de kromme $y = x^3 - 4x$"?

---

[1]) Al heb ik enkele bezwaren en al blijf ik een tegenstander van de scheve parallelprojectie.

II. blz. 117, nr. 25:

Bereken de oppervlakte van de figuur die begrensd wordt door bogen van de grafieken van de functies $(x - 2)^2$ *en* $\frac{1}{3}x(4 - x)$.

Ik voor mij spreek dan maar liever van de krommen $y = (x - 2)^2$ en $y = \frac{1}{3}x\,(4 - x)$, al geef ik toe, dat de leerling beseffen moet dat deze kromme hier dient als m.p. van de uiteinden van de loodlijnstukken op de X-as.

Tot slot nog enkele detailopmerkingen.

1. Indien men y wenst te gebruiken als „naam" voor een functie, bijv. $y = ax^2 + bx + c$ (dr. van Tol), dan is het toch aan te bevelen om niet y te schrijven, maar — althans nu en dan —

$$y(x) = ax^2 + bx + c.$$

Het komt dan neer op de vervanging van de f door de y. Zelf voer ik, omgekeerd, wel eens een f-as i.p.v. een y-as in! We moeten een beetje „bewegelijk" blijven.

2. De behoefte om in de algebrales problemen te behandelen, die in de analytische meetkunde thuishoren (dr. Vredenduin) zal bij invoering van de anal.meetk. als leervak *niet* verdwijnen; die behoefte spruit nl. niet voort uit een soort vrouwelijke voorkeur voor lievelingsonderwerpen, maar uit de wenselijkheid om de oplossing van stelsels van 2 vergelijkingen te illustreren, hetgeen een algebraïsch probleem is.

3. De opgave: los grafisch $3x + 1 > 2x - 5$ op (dr. Vr.) kan ook wel mèt y gelezen worden: voor welke y ligt de rechte $y = 3x + 1$ boven de rechte $y = 2x - 5$. Overigens geef ik zelf de voorkeur aan de eerste formulering, en aan een oplossing *zonder* grafiek. Ik ga niet per taxi naar mijn buurman; ik loop liever.

DE DERDE OPGAVE STELKUNDE 1957

door

Dr. W. A. M. Burgers

Naar aanleiding van de critiek van collega Jacobs in Euclides (VII, 58) enkele opmerkingen.

„Het berouw komt altijd na de zonde". Als men geeft, dat:

$S_n = \frac{t_1^2 - t_2 t_n}{t_1 - t_2}$, dan is *zonder meer* nodig, dat $t_1 \neq t_2$. De voorwaarde: $t_1 \neq t_2$ is dus een *overbodig* gegeven (maar voor de candidaten was het prettig, dat hierop de aandacht werd gevestigd, hetzelfde geldt voor de consequentie: $t_2 \neq 0$, ongelijkheden, nodig voor het geven van een correct bewijs van 3).

Het is echter uit den boze, om bij de vereenvoudiging van de breuk: $\frac{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}{t_1 - t_2}$ te herhalen dat $t_1 \neq t_2$.

Natuurlijk, men mag niet door nul delen, maar als men de breuk opschrijft heeft men al door $t_1 - t_2$ gedeeld!

Wat wel moest opvallen: de formule voor S_n geldt voor $n \geqq 3$, dan wordt de grens verschoven naar $n = 2$? Waarom niet direct gegeven: $S_n = \frac{t_1^2 - t_2 t_n}{t_1 - t_2}$ geldt voor $n \geqq 2$?

Het antwoord hierop is, meen ik, het volgende:

Voor $n = 2$ is de gegeven betrekking een *identiteit*. Geen wonder, dat voor de beantwoording van 2, $n = 2$ géén resultaten geeft. Deze beantwoording is eenvoudig: voor $t_1 = 0$ en $n = 3$ geldt: $S_3 = t_3$, maar $S_3 = t_2 + t_3$. Ergo: $t_2 = 0$ in strijd met: $t_1 \neq t_2$.

Was het niet beter geweest 1 en 2 te verwisselen? M.i. wel.

Wat de verdere critiek op de onderdelen 3 en 4 aangaat, men kan een opgave toch niet afkeuren, als de methode die men voor de oplossing gebruikt onjuist (niet exact) is!

Ten overvloede, om misverstand te voorkomen, de opgave is „jammer genoeg" niet van mij. Wel vond ik het een aardige vondst. Daarom heb ik getracht het „recept" te achterhalen. Dit meen ik gevonden te hebben. Immers: $S_n = t_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$ bij een meetkundige reeks.

$$S_n = t_1 \frac{1 - r^n}{1 - \frac{t_2}{t_1}} = \frac{t_1^2 - t_1^2 r^n}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^2 - t_2 t_n}{t_1 - t_2}. \quad \left(\begin{matrix} \text{N.B.} & \frac{t_2}{t_1} \neq 1 \\ & t_1 \neq 0 \end{matrix}\right).$$

Zodat de oplossing van opgave 3 de bevestiging is van de omkeerbaarheid.

MECHANICA-OPGAVEN N I 1958

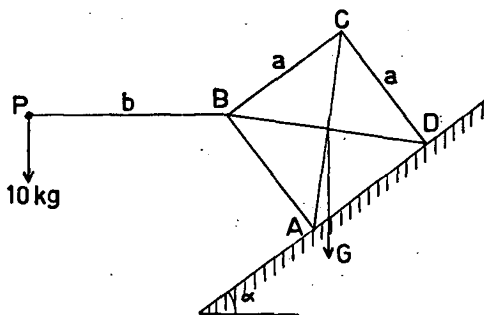
De vraagstukken 1 en 4 van het eerste en 1 en 3 van het tweede stel opgaven behandelen onderwerpen, die niet tot de leerstof van de h.b.s.-B behoren.

Van de in de vraagstukken voorkomende koorden wordt aangenomen, dat ze niet-elastisch, volkomen buigzaam en massaloos zijn. $g = 10\ m/\text{sec}^2$.

I-2. Op een ruw hellend vlak ($\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$) bevindt zich een homogene kubus met ribbe a. In het midden van de ribbe door B, welke evenwijdig aan het vlak en horizontaal loopt, is een koord bevestigd (lengte b), waaraan een stoffelijk punt P van 10 kg vastgemaakt is. Men houdt het koord horizontaal (zie tekening) en laat P zonder beginsnelheid los. Zodra het koord evenwijdig aan het hellend vlak gekomen is, staat de kubus op het punt van kantelen.

a. Hoe groot is het gewicht van de kubus?

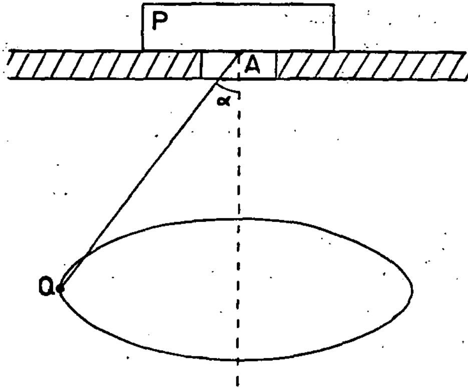
b. Hoe groot moet de wrijvingscoëfficiënt tussen de kubus en de helling minstens zijn?



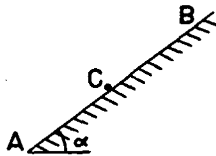
I-3. Op een horizontaal vlak, waarin zich een opening bevindt, plaatst men over de opening een lichaam P dat 20 kg weegt. Tussen P en het vlak is de wrijvingscoëfficiënt 0,125. In A bevestigt men een koord van 50 cm lengte aan P en aan dit koord hangt men een stoffelijk punt Q. Nu laat men Q om de verticaal door A eenparig ronddraaien, zodanig dat het koord daarbij een hoek α met de verticaal insluit, waarbij $\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$ is. Gegeven is, dat P dan steeds op het punt staat te gaan glijden.

a. Bereken het gewicht van Q en de hoeksnelheid van Q in rad/sec.

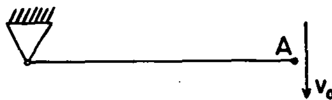
b. Vervolgens laat men Q vrij hangen en geeft dit punt een zodanige horizontale snelheid, dat P bij dezelfde uitwijking van het koord gaat glijden. Hoe groot is de snelheid van Q bij deze uitwijking? Bepaal ook grootte en richting van de resulterende kracht, die op dat ogenblik op Q werkt.



II-2. Op een hellend vlak, tg $\alpha = 0{,}75$, bevindt zich een stoffelijk punt C, dat 10 kg weegt. Het vlak AB heeft een eenparig versnelde beweging met $a = 3$ m/sec² in een richting loodrecht op AB in opwaartse zin. Tijdens deze beweging van AB glijdt C langs AB omlaag en wel zodanig, dat de snelheid van C horizontaal gericht is. Bereken de wrijvingscoëfficiënt tussen C en het vlak AB.



II-4. Een stoffelijk punt A is opgehangen aan een 5 m lang koord. Men houdt het koord horizontaal en geeft A een beginsnelheid V_0 verticaal omlaag van $5\sqrt{3}$ m/sec. A passeert de verticaal door het ophangpunt voor de tweede maal in een punt P. Gevraagd wordt de plaats van P.



BOEKBESPREKING

Dr. G. Bosteels, *Het leven der getallen*, 143 blz., geb. 48 F; De Sikkel N.V., Antwerpen, 1958.

Dat Bosteels bezield is met liefde voor het onderwijs is ook velen in Nederland bekend. Degenen, die hem kennen, zal het dan ook niet verbazen, dat hij zijn tijd heeft willen geven voor het samenstellen van een aardig boekje, dat als enige pretentie heeft de leerlingen van de lagere klassen belangstelling voor de wiskunde te doen krijgen. Men vindt er allerlei wetenswaardigheden en aardigheden op het gebied van de leer der natuurlijke getallen in. In het eerste hoofdstuk wordt uiteengezet, hoe primitieve volksstammen getallen voorstellen en op welke wijze in de loop der historie de getallen geschreven zijn door verschillende volkeren, o.a. Hebreeuwen, Egyptenaren, Grieken, Romeinen, Arabieren. Daarna volgt een bonte serie van allerlei historische bijzonderheden, puzzels e.d., gegroepeerd om de getallen 0 tot en met 12, 20 en 60. De eigenschappen van de talstelsels spelen hierbij een belangrijke rol. Om een indruk te geven van de inhoud noem ik enkele behandelde probleempjes: het overbrengen van schijven van verschillende grootte van een pin op een andere, waarbij geen grotere schijf op een kleinere gelegd mag worden, het aantal gewichten nodig om alle lichamen van 1 tot en met 40 kg te wegen, rekenkundige reeksen van hogere orde (b.v. die van vijfhoeksgetallen), het raden van getallen, de dag waarop een bepaalde datum valt, het Petersburger bruggenprobleem. In het slothoofdstuk vindt men nog een opsomming van manieren, waarop in de historie rekenoperaties zijn uitgevoerd, waarbij ook de abacus ter sprake gebracht wordt.

Leraren aan scholen, die een bibliotheek hebben, waarin ook wiskundeboeken voorkomen, raad ik stellig aan van dit boek kennis te nemen.

P. G. J. Vredenduin

Ir. J. B. Obbink, Rekentafel *Abacus*, grafische logaritmentafel. Prijs *f* 2,90, te storten op girorekening no. 15193 t.n.v. de auteur. Den Haag.

De Abacus bestaat uit twee reeksen getallen, die van elkander gescheiden zijn door een lijn waarop aan beide zijden een schaalverdeling is aangebracht. Deze lijn is verdeeld in stukken van ongeveer 20 cm, waarvan er 20 op elke bladzijde voorkomen. De tafel beslaat 22 blz. Boven de lijn vindt men de reeks der getallen van 1000 tot 10000; er onder de mantissen der 10-logaritmen van deze getallen. De basis van de tafel is de schaal der mantissen: van 0000 tot 8000 bedraagt de afstand 19,7 cm per 25 eenheden van de vierde decimaal, van 8000 tot 9600 19,7 cm per 20 eenheden, van 9600 tot 10000 19,7 cm per 10 eenheden. Beide getallenreeksen bestaan dus uit getallen van vier cijfers; door gebruik te maken van de 10-delige schaalverdeling kan het vijfde cijfer er aan toegevoegd worden, terwijl men kwarten van de vijfde decimaal kan schatten.

Wie zich de overigens niet grote moeite geeft aan de structuur van deze grafische tafel te wennen zal er stellig snel en nauwkeurig mee kunnen werken.

Een groot bezwaar tegen de uitvoering is dat de druk van de bladzijden waarop de mantissen 7000 tot 9600 voorkomen zo sterk gecomprimeerd is dat het hanteren van deze tafel een voor de ogen zeer vermoeiende bezigheid is.

Met alle waardering voor de nauwkeurigheid waarmede de auteur zijn werk heeft verricht menen wij toch dat deze grafische logaritmentafel voor ons onderwijs de gebruikelijke tafels niet zal kunnen vervangen.

D. N. van der Neut

Kernreactortechnologie, leergang Delft 3—7 september 1957. D. B. Centen's uitgeversmaatschappij, Hilversum, z. j. 356 blz., ing. *f* 9.50.

De voordrachten, die in september 1957 te Delft voor de Associatie voor toegepaste kernwetenschap zijn gehouden, zijn uit het „Chemische weekblad" overgedrukt en apart gebundeld uitgegeven.

Prof. Dr. E. W. Beth, *De weg der wetenschap*, inleiding tot de methodenleer der empirische wetenschappen. De Erven F. Bohn N.V., Haarlem, 1958. 60 blz., ing. *f* 2.50.

Prof. Beth geeft in dit werkje een samenvatting van een reeks lessen, die hij geeft aan een groep eerstejaarsstudenten in de faculteit der politieke en sociale wetenschappen. Het geeft in beknopte vorm een duidelijk overzicht van de wijze, waarop wetenschappelijke werkstukken tot stand komen. Het is daardoor nuttige lectuur voor ieder, die de wetenschap beoefent, het inspireert de beginner tot een meer systematische en daardoor in het algemeen tot een meer kans op succes biedende aanpak. In het bijzonder zou ik het boekje willen aanbevelen in de aandacht van hen, die met onderwijs in de algemene of in een of andere speciale didactiek zijn belast.

H. W. Lenstra

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

VERGADERINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

29 december 1958 te 10.30 uur in Esplanade te Utrecht: algemene vergadering van Wimecos. Zie voor de voorlopige agenda het vorige nummer (blz. 94).

6 april 1959 (waarschijnlijk!) vergadering van Liwenagel.

NIEUWE REGELING EXAMENS M.O.

In het Staatsblad 452 van 30 september 1958 is het K.B. opgenomen van 15 september 1958, dat het reglement voor de examens in de middelbare akten bevat.

Het bevat twee belangrijke wijzigingen. In de eerste plaats is de mogelijkheid ingevoerd, voor bepaalde onderdelen met een tentamen te volstaan. En voorts kunnen behalve de gewone examencommissies in het vervolg universitaire commissies worden ingesteld ten behoeve van hen, die hun opleiding voor een akte aan een universiteit ontvangen.

RECTIFICATIE

In de goniometrische tabel, die in het vorige nummer van Euclides is afgedrukt, is als waarde voor sin $0{,}238\pi$ opgegeven „0,6780". Dit moet zijn: 0,6800.

Verder staat abusievelijk in het boven- en onderschrift van de kolommen „$x.10^{-3}$". Dit moet zijn: $x.10^{3}$.

P. G. J. V.

CONTRIBUTIE WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden, die hun contributie over het verenigingsjaar 1958/1959 nog niet hebben betaald, *f* 8.— te laten overschrijven op postgirorekening 1 4 3 9 1 7 ten name van Wimecos te Amsterdam.